

## Modelando y optimizando el problema de selección de portafolio de múltiples objetivos y parámetros difusos triangulares

Luis Mario Velasco Ocejo, Héctor Joaquín Fraire Huacuja,  
Fausto Antonio Balderas Jaramillo

Tecnológico Nacional de México,  
Instituto Tecnológico de Ciudad Madero,  
México

`luisvelasco.dev@gmail.com, {hector.fh,  
fausto.bj}@cdmadero.tecnm.mx`

**Resumen.** En este artículo se aborda el problema de optimización de la selección de portafolio considerando parámetros difusos triangulares. En la literatura de trabajos relacionados, esta variante del problema no ha sido abordada. En este trabajo se proponen un nuevo modelo matemático del problema y dos algoritmos de solución basados en la metodología del algoritmo genético basado en no dominancia. Uno de estos algoritmos utiliza el estimador de densidad Desviación de Dispersión Espacial, para mejorar la distribución de soluciones en los frentes de Pareto. Para evaluar el desempeño de los algoritmos propuestos, se realizaron una serie de experimentos con un conjunto de instancias de distintos tamaños. Las conclusiones de la evaluación experimental fueron validadas con la aplicación de dos pruebas no paramétricas de hipótesis: Wilcoxon y Friedman. Los resultados de la evaluación de dichas pruebas se reportan en el presente artículo.

**Palabras clave:** Parámetros difusos triangulares, frente de Pareto, desviación de dispersión espacial.

### Modeling and Optimizing the Multi-Objective Portfolio Selection Problem with Triangular Fuzzy Numbers

**Abstract.** In this paper, the Multi-objective Portfolio Selection Optimization Problem with Triangular Fuzzy Parameters is approached. This variant of the problem has not been approached in related literature. In this work, a new mathematical model and two non-dominance methodology-based genetic algorithms are proposed for solving the problem. One of them uses the Spatial Spread Deviation density estimator in order to increase the distribution of the solutions in Pareto fronts. In order to test the performance of the proposed algorithms, a series of experiments with different sized instances was carried out. Experiment results were confirmed by applying two non-parametric hypothesis tests: Wilcoxon and Friedman. The results of those tests are reported in this paper.

**Keywords:** Triangular fuzzy parameters, Pareto front, spatial spread deviation.

## 1. Introducción

A lo largo de la historia, el proceso de toma de decisiones ha representado una actividad crucial para todas las entidades del ramo organizacional, debido a que la elección de una buena o mala decisión impactará directamente en sus recursos y en el curso de acciones a tomar en el futuro.

Por ello, la toma de decisiones debe estar siempre influenciada por la información obtenida del análisis de los recursos y objetivos de la organización en cuestión. Sin embargo, dado que el proceso de toma de decisiones depende enteramente de dicha información, resulta especialmente complejo tomar una decisión cuando la información disponible es ambigua, imprecisa o incierta.

El problema de optimización de selección de portafolio es un problema de toma de decisiones al que las organizaciones suelen enfrentarse cotidianamente. El problema consiste en seleccionar un conjunto de proyectos (llamado portafolio) de entre todos los proyectos disponibles cuyo costo pueda ser solventado con los recursos disponibles y que maximice los beneficios que su realización le representan a la empresa.

Dado que en muchos casos la información disponible acerca de los costos y beneficios sólo se conoce parcial o aproximadamente, se han ideado diversos mecanismos para modelarla, siendo uno de ellos el uso de conjuntos difusos [1].

En el presente trabajo, se aborda el modelado de la incertidumbre presente en los parámetros del problema de optimización de selección de portafolio mediante números difusos triangulares.

## 2. Trabajos relacionados

Existe una gran variedad de mecanismos para abordar la incertidumbre de los parámetros del problema multiobjetivo de selección de portafolios con parámetros estáticos, en [2] por ejemplo, se proponen mecanismos estadísticos que permiten reducir la incertidumbre y modelar el proceso de toma de decisiones, lo cual requiere de un proceso de análisis para determinar las distribuciones de probabilidad adecuadas y verificar las dependencias estadísticas presentes, lo que puede resultar especialmente complejo para determinadas instancias del problema.

En [1] se aborda únicamente el modelado de las restricciones del problema mediante números difusos, lo cual evita la necesidad de verificar las dependencias estadísticas y la selección de distribuciones de probabilidad.

En otros trabajos, suele abordarse la incertidumbre presente únicamente en las restricciones [3] o únicamente en los beneficios [4] que representan los proyectos.

Por otro lado, otros trabajos suelen abordar una variante distinta del problema en la que tanto las restricciones como las funciones objetivo (beneficios) son modelados mediante números difusos, con la distinción particular del tipo de números difusos empleado para modelarlos.

En [5] por ejemplo, la imprecisión es modelada mediante números difusos del tipo intervalo y propone su resolución mediante el algoritmo I-NSGA-II, una variante del algoritmo NSGA-II adaptado para funcionar con parámetros difusos de dicho tipo.

Derivado del análisis de los trabajos relacionados antes mencionados, se proponen como aportaciones principales del presente trabajo el modelado del problema

empleando números difusos triangulares y su resolución mediante un nuevo algoritmo: Tri-NSGA-II.

De igual manera, se propone la modificación del esquema original del algoritmo NSGA-II para incorporar el estimador de densidad SSD, produciendo la variante Tri-NSGA-II-SSD del algoritmo.

### 3. Teoría de números difusos

Este capítulo contiene los conceptos principales de la teoría de números difusos abordados en el presente artículo.

#### 3.1. Conjuntos difusos

Sea  $X$  un conjunto de elementos denotados de forma genérica como  $x$ , entonces un conjunto difuso  $A$  definido sobre  $X$  es un conjunto de pares ordenados:  $A = \{\mu_A(x) | x \in X\}$ . Donde  $\mu_A(x)$  es conocido como función (o grado) de pertenencia (o membresía) de  $x$  en  $A$ , cuyo propósito es mapear a  $X$  en el espacio de membresía  $M$  [6].

Números difusos generalizados. Un número difuso generalizado, denotado comúnmente como  $\tilde{A}$ , es un subconjunto cualquiera del conjunto de números reales  $\mathbb{R}$  cuya función de membresía  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  satisface las siguientes condiciones [7]:

1.  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  es un mapeo continuo de  $\mathbb{R}$  en el intervalo  $[0, 1]$ .
2.  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0, -\infty < x < a$ .
3.  $\mu_{\tilde{A}}(x) = L(x)$ , es estrictamente creciente para  $[a, b]$ .
4.  $\mu_{\tilde{A}}(x) = w$ , para  $b < x < a$ .
5.  $\mu_{\tilde{A}}(x) = R(x)$ , es estrictamente decreciente para  $[\alpha, \beta]$ .
6.  $\mu_{\tilde{A}}(x) = 0$ , para  $\beta < x < \infty$ .

donde  $0 < w < 1, a, b, \alpha, \beta$  son números reales.

Un número difuso generalizado  $A$  se denota como:  $\tilde{A} = (a, b, \alpha, \beta, w)_{LR}$ . Cuando  $w=0$ , el número se denota como  $\tilde{A} = (a, b, \alpha, \beta)_{LR}$ . Cuando  $a=b$  y  $L(x)$  y  $R(x)$  son líneas rectas,  $A$  es un número difuso triangular y se denota como  $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)$ . Una función de membresía triangular se define como:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a_{\min} \\ \frac{x-a_{\min}}{\beta-a_{\min}}, & x \in (a_{\min}, \beta) \\ \frac{a_{\min}-x}{a_{\min}-\beta}, & x \in (\beta, a_{\min}) \\ 0, & x \geq a_{\max} \end{cases} \quad (1)$$

#### 3.2 Adición de números difusos triangulares

Dados dos números difusos triangulares  $\tilde{A}_1 = (a_1, \alpha_1, \beta_1)$  y  $\tilde{A}_2 = (a_2, \alpha_2, \beta_2)$ , entonces [8]:

$$\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, \alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2), \quad (2)$$

### 3.3 Integración de media graduada

La integración de Media Graduada [9] (*Graded Mean Integration*, GMI por sus siglas en inglés) es un método de normalización de números difusos (usualmente llamado método de *defuzzificación*) empleado para facilitar su comparación y establecer una relación de orden entre ellos. El número difuso mayor será aquel que cuente con más alto valor de GMI.

El valor de GMI de un número difuso  $\tilde{A}$ , denotado como  $P(\tilde{A})$  se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$P(\tilde{A}) = \frac{\int_0^w h \left( \frac{L^{-1}(h)+R^{-1}(h)}{2} \right) dh}{\int_0^w h dh}, \quad (3)$$

En el caso particular de los números difusos triangulares, la ecuación (3) puede simplificarse de la siguiente manera:

$$P(\tilde{A}) = \frac{6\alpha + \beta - \alpha}{6}. \quad (4)$$

### 3.4 Relación de orden entre números difusos triangulares

Dados dos números triangulares  $\tilde{A}_1$  y  $\tilde{A}_2$ :

- $\tilde{A}_1 > \tilde{A}_2$  si y solo si  $P(\tilde{A}_1) > P(\tilde{A}_2)$ .
- $\tilde{A}_1 < \tilde{A}_2$  si y solo si  $P(\tilde{A}_1) < P(\tilde{A}_2)$ .
- $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$  si y solo si  $P(\tilde{A}_1) = P(\tilde{A}_2)$ .

### 3.5 Dominancia

Con base en la definición de dominancia [10], es posible establecer una relación de dominancia entre dos vectores difusos:  $X = \{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n\}$  y  $Y = \{\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_n\}$ , donde  $\tilde{x}_i$  y  $\tilde{y}_i$  son números difusos triangulares. Se dice que  $X$  domina a  $Y$  si y solo si  $\tilde{x}_i \geq \tilde{y}_i \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $\tilde{x}_i > \tilde{y}_i$  para al menos un valor de  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  [11].

## 4. Modelo matemático del problema multiobjetivo de selección de portafolio con parámetros difusos triangulares

Sean  $n$  el número de proyectos a considerar,  $\tilde{C}$  el presupuesto total disponible,  $O$  el número de objetivos,  $\tilde{c}_i$  el costo del proyecto  $i$ ,  $\tilde{b}_{ij}$  el beneficio obtenido de la realización del proyecto  $i$  en el objetivo  $j$ ,  $K$  y  $M$  el número de áreas y regiones a considerar respectivamente,  $\tilde{A}_k^{min}$  y  $\tilde{A}_k^{max}$  los límites inferior y superior del presupuesto asignado al área  $k$ ,  $\tilde{R}_m^{min}$  y  $\tilde{R}_m^{max}$  los límites inferior y superior del presupuesto asignado a la región  $m$ .

Las variables  $a_i, b_i$  son valores que representan el área y la región a las que pertenece el proyecto  $i$ .  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un vector binario que especifica los proyectos incluidos en un determinado portafolio. Si  $x_i = 1$ , el proyecto  $i$  se encuentra dentro del portafolio, en caso contrario, el proyecto  $i$  no está incluido en él. Con los elementos antes mencionados, es posible modelar el problema de la siguiente manera:

$$\text{Max } Z = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \dots, \tilde{z}_n), \quad (5)$$

donde:

$$\tilde{z}_j = \sum_{i=1}^n \tilde{b}_{ij} x_i, \quad j = 1, 2, \dots, O, \quad (6)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n \tilde{c}_i x_i \leq \tilde{C}, \quad (7)$$

$$\tilde{A}_k^{\min} \leq \sum_{i=1, a_i=k}^n \tilde{c}_i x_i \leq \tilde{A}_k^{\max}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (8)$$

$$\tilde{R}_m^{\min} \leq \sum_{i=1, b_i=m}^n \tilde{c}_i x_i \leq \tilde{R}_m^{\max}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (9)$$

$$x_i \in \{0,1\}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (10)$$

En la formulación antes mencionada, todas las variables denotadas con tilde (~) representan números difusos triangulares.

La función objetivo maximiza las contribuciones a cada uno de los objetivos (5). El valor de los objetivos se calcula mediante la adición de la contribución que cada uno de los proyectos presentes en el portafolio representa para cada objetivo (6). La restricción de presupuesto (7) asegura que la suma de los costos de inversión de los proyectos seleccionados no exceda el presupuesto total.

De manera similar, las restricciones de área (8) y región (9) aseguran que la suma de los costos de los proyectos pertenecientes a determinada área y región se encuentren dentro de los límites de presupuesto establecidos. Las soluciones al problema serán vectores binarios de tamaño  $n$  que representarán los proyectos incluidos dentro del portafolio (10).

## 5. Algoritmo Tri-NSGA-II

En esta sección se describe el diseño del algoritmo principal propuesto en el presente trabajo: Tri-NSGA-II. Este algoritmo es una adaptación del algoritmo clásico NSGA-II [12] para trabajar con parámetros difusos triangulares. Al igual que en el algoritmo original, Tri-NSGA-II presenta un enfoque generacional para abordar el problema de selección de portafolio.

El algoritmo requiere como entrada una instancia del problema que contiene los valores difusos de cada uno de los parámetros mencionados en la sección anterior y su salida consiste en una aproximación al frente de Pareto de dicha instancia.

### 5.1. Representación de soluciones y evaluación de factibilidad

Como se mencionó anteriormente, las soluciones al problema de selección de portafolio pueden representarse mediante un vector binario, cuyos valores representan la inclusión o ausencia de cada uno de los proyectos en el portafolio en cuestión, por lo que el espacio de posibles soluciones para un problema de  $n$  proyectos es  $S = \{0,1\}^n$ .

En la Fig. 1 puede observarse un ejemplo de solución candidata para determinada instancia del problema. Una solución candidata deber ser evaluada para determinar un

vector de objetivos difusos y su factibilidad se debe verificar para comprobar que satisface las restricciones del modelo matemático del problema. Los parámetros difusos triangulares son utilizados en ambos procesos y, para compararlos, será necesario el cálculo de GMI de cada uno de ellos.

## 5.2. Operador de cruza uniforme

Es un operador clásico de cruza en el que se seleccionan dos elementos de la población para generar descendencia. En él, los genes de cada uno de las soluciones padre tienen la misma probabilidad de ser transferidos a su descendencia [13, 14].

## 5.3. Operador de mutación: *one bit flip*

Es un método clásico de mutación de soluciones con representación binaria. Consiste en seleccionar de manera aleatoria una posición de una solución y cambiar su valor binario (de 0 a 1 o viceversa).

## 5.4. Generación de la población inicial

La población inicial del algoritmo Tri-NSGA-II comprende un número previamente definido de portafolios, generados de manera aleatoria. Cada solución generada es evaluada para verificar su factibilidad. La población inicial deberá estar conformada únicamente por soluciones factibles.

## 5.5. Ordenamiento de la población

El ordenamiento de la población constituye una parte fundamental en el funcionamiento del algoritmo Tri-NSGA-II. Las soluciones que conforman la población son ordenadas en dos etapas: la etapa elitista, denominada Ordenamiento por No Dominancia (en inglés: *Non-dominated Sorting*) que asegura la permanencia de las mejores soluciones, y la etapa de diversificación, conocida como Ordenamiento por Distancia de Amontonamiento (o *Crowding Distance Sorting*, *CD Sorting* por sus siglas en inglés) que busca asegurar que las soluciones sean suficientemente distintas entre sí.

## 5.6. Ordenamiento por no dominancia

El ordenamiento por no dominancia es un método de ordenamiento que tiene como propósito preservar la calidad de los portafolios presentes en la población, su funcionamiento puede dividirse en dos etapas, la primera de ellas consiste en la generación de un grupo de soluciones, denominado “frente de soluciones no dominadas”. Para determinar las soluciones que integran dicho frente, los vectores de objetivos de cada una de las soluciones de la población serán comparados entre sí para verificar la relación de dominancia que existe entre ellas. Aquellas soluciones que no sean dominadas por ninguna otra solución formarán parte del frente.

La segunda etapa del proceso de ordenamiento consiste en la generación de frentes subsecuentes con el conjunto de portafolios restante. Para ello, cada uno de los

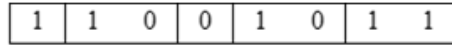


Fig. 1. Ejemplo de solución candidata.

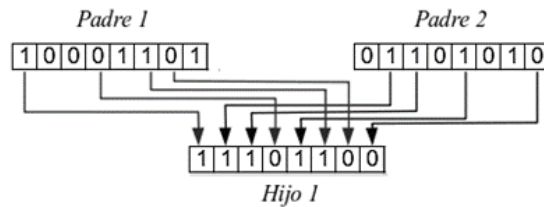


Fig. 2. Ejemplo de cruce uniforme.



Fig. 3. Ejemplo de mutación one bit flip.

portafolios presentes en el frente recién creado es explorado y el contador de dominancia de cada uno de los portafolios dominados por ellos se decrementa en 1, en caso de que el contador de alguno de ellos llegue a 0, será agregado al nuevo frente.

### 5.7. Ordenamiento por distancia de amontonamiento

La Distancia de Amontonamiento (*Crowding Distance*, CD por sus siglas en inglés) de una solución es un valor estimado de la densidad de soluciones que la rodean [12]. Este tipo de ordenamiento consiste en explorar cada uno de los frentes generados en la etapa anterior, calculando el valor de la métrica CD para cada uno de los portafolios contenidos en ellos.

Posteriormente, los portafolios de cada frente serán reorganizados de acuerdo a sus respectivos valores de CD. Para calcular el valor de la métrica es necesario ordenar las soluciones de cada frente por sus valores objetivo, posteriormente, se deberá asignar  $\infty$  como valor de CD de la mayor y menor solución respectivamente. El valor de CD del resto de las soluciones puede calcularse mediante la fórmula:

$$d_{lj}^m = d_{lj}^m + \frac{f_m^{l+1} - f_m^{j-1}}{f_m^{\max} - f_m^{\min}}, \quad (11)$$

donde  $d$  es el valor de la métrica,  $l$  es la posición de la solución dentro de la población,  $j$  es la posición de la solución con respecto a las demás soluciones del frente  $f$  es el valor objetivo,  $m$  es el objetivo actual. El proceso se realiza con cada uno de los  $m$  objetivos, la sumatoria de dichos valores representará el valor de CD de dicha solución. Una vez calculada la métrica para cada uno de los portafolios, el frente deberá ser ordenado en forma decreciente.

## 6. Algoritmo Tri-NSGA-II-SSD

Tri-NSGA-II-SSD es una adaptación del algoritmo Tri-NSGA-II que incorpora la Desviación de Dispersión Espacial (*Spatial Spread Deviation*, SSD por sus siglas en inglés) como estimador de densidad. En la presente sección se describe el funcionamiento de dicho estimador dentro del algoritmo.

### 6.1. Desviación de dispersión espacial (SSD)

La Desviación de Dispersión Espacial es un estimador de densidad cuyo propósito de incorporación a Tri-NSGA-II es que las soluciones de los frentes no se encuentren separadas entre sí por márgenes muy amplios [15]. De manera similar al ordenamiento por CD, los valores de los objetivos de las soluciones de cada frente son normalizadas para posteriormente calcular su respectivo valor de SSD con las fórmulas siguientes:

$$temp1(i) = \frac{1}{n-1} \sqrt{\sum_{j=1}^n (D(i,j) - (D_{max} - D_{min}))^2} \quad \forall i \neq j, \quad (12)$$

$$temp2(i) = \sum_{j \in K} \frac{D_{max} - D_{min}}{D(i,j)}. \quad (13)$$

La Fig. 4 muestra ambas etapas del algoritmo Tri-NSGA-II.

$$SSD(i) = SSD_0(i) + temp1(i) + temp2(i), \quad (14)$$

donde  $D(i,j)$  es la distancia de la solución  $i$  a la solución  $j$ .  $D_{max}$  y  $D_{min}$  son la mayor y menor distancia entre las soluciones, respectivamente.  $K$  es el número de  $k$  vecinos más cercanos a la solución  $i$  y  $SSD_0$  es el valor inicial de SSD de la solución  $i$ , el cual, en caso de ser uno de los valores extremos del frente de objetivos normalizados deberá tomar el valor de  $-\infty$ .

## 7. Resultados experimentales

Con el propósito de evaluar el funcionamiento y desempeño de los algoritmos propuestos en el presente trabajo se realizaron dos experimentos, los cuales se describen en la presente sección.

### 7.1. Descripción de instancias

La experimentación se realizó usando un conjunto de instancias del problema de selección de portafolio previamente procesadas con el propósito de convertir sus parámetros a números difusos triangulares. Dichas instancias contienen la siguiente información:

- Presupuesto total (número triangular).
- Número de objetivos.
- Número de áreas.
- Límites de presupuesto para cada área (uno por línea) (números triangulares).

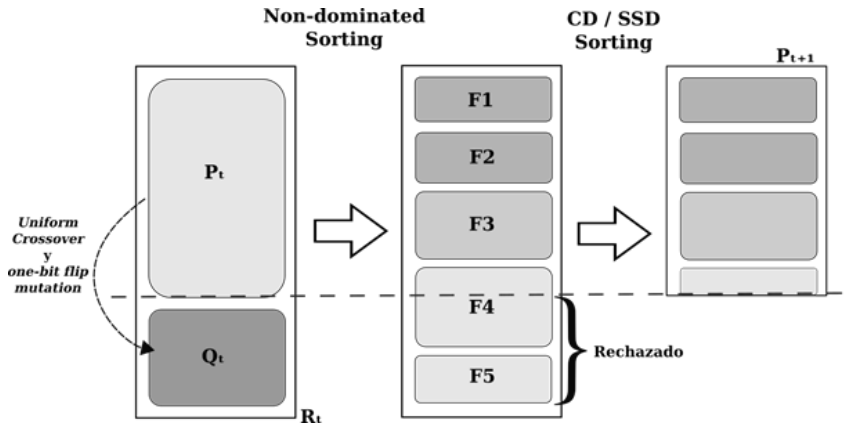


Fig. 4. Diagrama general de Tri-NSGA-II.

- Número de regiones.
- Límites de presupuesto para cada región (uno por línea) (números triangulares).
- Número de proyectos.
- Descripción de proyectos (uno por línea), incluye: costo (número triangular), área, región, aportación a objetivos (números triangulares).

Las instancias están identificadas con un nombre en el formato *onpm\_idTri*, donde *n* representa al número de objetivos y *m* al número de proyectos e *id* es un número que identifica a la instancia.

### 7.2. Condiciones de experimentación

Los experimentos descritos en el presente trabajo fueron realizados en un equipo con procesador AMD A8-6410 *Quad core* a 2.4GHz, 6GB RAM 1600MHz. Los parámetros de configuración de los algoritmos se describen a continuación:

- Tamaño de la población: 50.
- Número de iteraciones: 100.
- Porcentaje de población a cruzar 20%.
- Porcentaje de población a mutar 50%.

### 7.3. Experimento 1: validación de funcionamiento

El propósito del primero de los experimentos realizados es validar el correcto funcionamiento de los algoritmos implementados. El experimento consistió en resolver mediante ambos algoritmos la instancia biobjetivo *o2p20\_0Tri* (de la cual se conoce el frente óptimo) y comparar los frentes aproximados obtenidos por los algoritmos Tri-NSGA-II y Tri-NSGA-II-SSD.

En la Fig. 5, es posible observar que los frentes aproximados producidos por ambas variantes del algoritmo son relativamente cercanos al frente óptimo. De

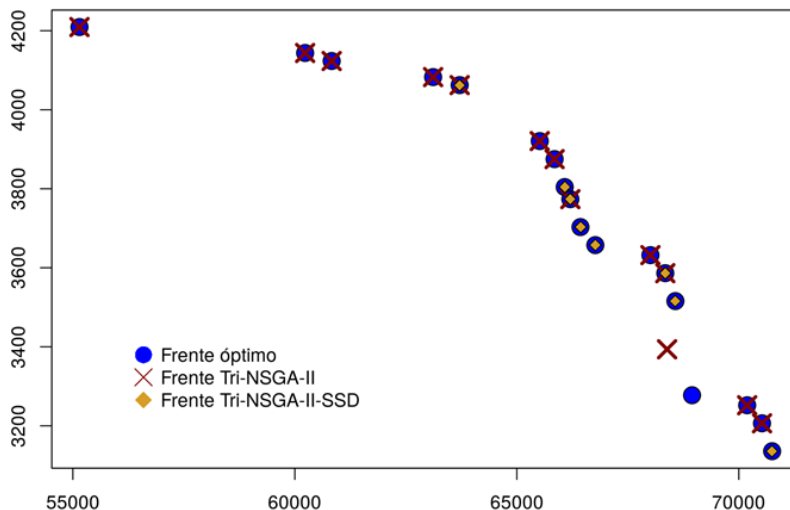


Fig. 5. Comparación de frentes para  $o2p20\_Tri$  (valores normalizados con GMI).

igual manera, es posible observar que el frente de la variante con SSD incluye soluciones no contempladas en el de la variante con CD.

#### 7.4. Experimento 2: evaluación de desempeño

Con el propósito de evaluar el desempeño de los algoritmos propuestos, se realizó un experimento que consistió en la resolución de un conjunto de 10 instancias de distintos tamaños, de 2, 4 y 9 objetivos respectivamente. Cada uno de los algoritmos fue ejecutado un total de 30 veces por instancia. Para cada una de las instancias se generó un conjunto de referencia, conformado por el conjunto de soluciones no dominadas de la combinación de los 30 frentes obtenidos.

Dicho frente de referencia fue utilizado como aproximación al frente óptimo de cada instancia para el cálculo de las métricas de hipervolumen (*HyperVolume*) y dispersión generalizada (*Generalized Spread*). Posteriormente, se calcularon la mediana ( $M_e$ ) y el rango intercuartílico (*IQR*) de los valores de dichas métricas, debido a que el rango intercuartílico y la mediana son menos sensibles a valores extremos en comparación con la media y la desviación estándar.

Con el propósito de validar los resultados obtenidos, se les aplicó una prueba de Wilcoxon con un nivel de confianza de 95%. En las tablas 5 y 6 pueden observarse los resultados de las métricas por cada instancia. Aquellos resultados cuyo resultado es significativo (de acuerdo a la prueba) se encuentran resaltados.

En la Tabla 5 puede observarse que Tri-NSGA-II es mejor con diferencia significativa en la resolución de las 10 instancias de prueba para la métrica de *HyperVolume*. Por otro lado, en la Tabla 6 es posible observar que Tri-NSGA-II-SSD tiene mejor desempeño en 7 de 10 instancias, en todas ellas con diferencia significativa. De igual manera, se realizó la prueba de Friedman con los valores obtenidos para ambas métricas.

**Tabla 1.** Resultados de evaluación con métrica *HyperVolume*.

<b>HyperVolume</b>				
<b>Instancia</b>	<b>Tri-NSGA-II</b>		<b>Tri-NSGA-II-SSD</b>	
	<b><math>M_e</math></b>	<b>IQR</b>	<b><math>M_e</math></b>	<b>IQR</b>
o2p20_Tri	0.238811441	0.044851738	0.163710911	0.069198901
o4p25_0Tri	0.264973213	0.05253274	0.20611812	0.096375359
o4p25_1Tri	0.209264293	0.079859039	0.146343058	0.100503483
o4p25_2Tri	0.259096812	0.066920563	0.209574394	0.121363497
o4p25_3Tri	0.172032511	0.03686516	0.161246173	0.083199129
o4p25_4Tri	0.26040734	0.097399762	0.213590777	0.122254636
o4p25_5Tri	0.227411752	0.064154667	0.180578485	0.087828932
o9p100_0Tri	0.072317856	0.078978551	0.059251828	0.066776339
o9p100_1Tri	0.081862723	0.079925586	0.051945505	0.041187613
o9p100_2Tri	0.124196526	0.092999414	0.084485714	0.0633435

**Tabla 2.** Resultados de evaluación con métrica *Generalized Spread*.

<b>Generalized Spread</b>				
<b>Instancia</b>	<b>Tri-NSGA-II</b>		<b>Tri-NSGA-II-SSD</b>	
	<b><math>M_e</math></b>	<b>IQR</b>	<b><math>M_e</math></b>	<b>IQR</b>
o2p20_Tri	0.95787788	0.45810173	0.71617801	0.1342707
o4p25_0Tri	0.41706173	0.06932411	0.34831437	0.06777055
o4p25_1Tri	0.403559	0.10486043	0.32747673	0.07611996
o4p25_2Tri	0.35834772	0.08948966	0.31741646	0.06983148
o4p25_3Tri	0.43841931	0.09865111	0.33124594	0.08006976
o4p25_4Tri	0.41285987	0.08332076	0.30090141	0.05669353
o4p25_5Tri	0.33274883	0.05214539	0.30352366	0.04080783
o9p100_0Tri	0.19171175	0.03487414	0.19084287	0.0275921
o9p100_1Tri	0.18635716	0.04270058	0.19014306	0.03099422
o9p100_2Tri	0.18869284	0.03584193	0.19065208	0.03091227

**Tabla 3.** Rankings de Friedman para ambos algoritmos con las métricas *HyperVolume* y *Generalized Spread*.

<b>HyperVolume (p-value: 4.43753E<sup>-11</sup>)</b>		<b>Generalized Spread (p-value: 6.84371E<sup>-11</sup>)</b>	
<b>Algoritmo</b>	<b>Ranking</b>	<b>Algoritmo</b>	<b>Ranking</b>
Tri-NSGA-II	1.3066666666666682	Tri-NSGA-II	1.7366666666666628
Tri-NSGA-II-SSD	1.6933333333333331	Tri-NSGA-II-SSD	1.2633333333333354

## 8. Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo se abordó el problema de optimización de la selección de portafolio considerando parámetros difusos triangulares. En la literatura revisada no existen antecedentes para abordar dicha variante del problema. Se propuso un nuevo modelo matemático y dos algoritmos basados en la metodología clásica del algoritmo NSGA-II, denominados Tri-NSGA-II y Tri-NSGA-II-SSD. Se realizaron pruebas experimentales sobre un conjunto de instancias de distintos tamaños y se les aplicaron dos pruebas no paramétricas (Wilcoxon y Friedman) como mecanismo de validación.

El análisis del desempeño de los algoritmos permitió observar que para la métrica de hipervolumen, el algoritmo Tri-NSGA-II logró mejores resultados en las 10 instancias de prueba con diferencia significativa y que, por otro lado, el algoritmo Tri-NSGA-II-SSD obtuvo mejores resultados para la métrica de dispersión generalizada en 7 de 10 instancias con diferencia significativa.

Ambos resultados fueron validados mediante la aplicación de la prueba de Friedman, en donde puede observarse que para la métrica de hipervolumen Tri-NSGA-II tiene menor *ranking* y que para la métrica de dispersión generalizada, la variante con SSD tiene un *ranking* menor.

Como trabajo futuro se contempla la implementación de variantes de estado estable de los algoritmos propuestos, así como realizar la evaluación de su desempeño considerando calidad y eficiencia.

## Referencias

1. Perez, F., Gomez. T.: Multiobjective project portfolio selection with fuzzy constraints. *Annals of Operations Research*, vol. 245, no. 1-2, pp. 7–29 (2016) doi:10.1007/s10479-014-1556-z
2. Medaglia, A., L.: A Multiobjective evolutionary approach for linearly constrained project selection under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, vol. 179, no. 3, pp. 869–894 (2007) doi: 10.1016/j.ejor.2005.03.068
3. Hua, K., Liu, B.: Project scheduling problem with mixed uncertainty of randomness and fuzziness. *European Journal of Operational Research*, vol. 183, no. 1, pp. 135–47 (2007) doi: 10.1016/j.ejor.2006.09.055
4. Kuchta, D.: Use of fuzzy numbers in project risk criticality assessment. *International Journal of Project Management*, vol. 19, no. 5, pp. 305–310 (2001) doi: 10.1016/S0263-7863(00)00022-3
5. Balderas-Jaramillo F. A.: Modelando la imprecisión del problema de cartera de proyectos con filosofía gris (tesis para obtener el grado de doctor en ciencias de la computación). Instituto Tecnológico de Tijuana (2018)
6. Zadeh, L. A.: Fuzzy sets. *Information and control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353 (1965) doi:10.1016/S0019-9958(65)90241-X
7. Vahidi, J., Rezvani S.: Arithmetic operations on trapezoidal fuzzy numbers. *Journal of Nonlinear Analysis and Application*, pp. 1–8 (2013) doi:10.5899/2013/jnaa-00111
8. Kumar, V.: Fuzzy genetic algorithms & fuzzy zdt test functions (tesis para obtener el grado de maestro en ciencias en matemáticas y computación). Indian Institute of Technology, Kharahpur (2010)
9. Chen, H. S., Hsieh, C. H.: Representation, ranking, distance and similarity of l-r type fuzzy number and application. *Australian Journal of Intelligent Processing Systems*, vol. 6, no. 4 (2000)
10. Deb, K.: Multi-objective optimization using evolutionary algorithms. 1st ed, John Wiley & Sons, pp. 3–34 (2001) doi: 10.1007/978-0-85729-652-8\_1
11. Yao, S.: A multi-objective dynamic scheduling approach using multiple attribute decision making in semiconductor manufacturing. *International Journal of Production Economics*, vol. 130, no. 1, pp. 125–33 (2011) doi: 10.1016/j.ijpe.2010.12.014
12. Deb, K.: A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE transactions on evolutionary computation*. vol. 6, no. 2, pp. 182–197 (2002) doi:10.1109/4235.996017

13. Ackley, D. H.: A connectionist machine for genetic hillclimbing. Springer, US (1987)
14. Gilbert, S.: Uniform crossover in genetic algorithms. In: Proceedings of the 3rd In: Conference on Genetic Algorithms, US (1989)
15. Santiago, A. Dorronsoro, B.: A novel multi-objective evolutionary algorithm with fuzzy logic based adaptive selection of operators: FAME. Information Sciences, vol. 471, pp. 233–251 (2019) doi: 10.1016/j.ins.2018.09.005

